УДК 621.31

ОЦЕНКА РОБАСТНОСТИ АЛГОРИТМОВ УПРАВЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

В.Г. Букреев, И.Ю. Краснов

Томский политехнический университет
E-mail: vbuk@yandex.ru

Осуществлен синтез робастных алгоритмов управления нестационарными электромеханическими объектами, произведена оценка их чувствительности.

Введение

Принципиально важным свойством адаптивных методов обработки информации является робастность, под которой понимается статистическая надежность метода и нечувствительность результатов к изменениям условий наблюдения. Основной особенностью рассматриваемых объектов является их нестационарность: параметры объектов с течением времени изменяются в определённом диапазоне. Нестационарность вносит принципиальные трудности как в изучение структурных свойств объекта (устойчивости, управляемости и наблюдаемости), так и в разработку алгоритмов оценивания и управления.

1. Описание модели объекта управления

Пусть математическая модель функционирования электромеханического объекта описана системой линейных нестационарных дифференциальных уравнений вида [1]:

$$\dot{x}(t)=\overline{A}(t)\,x(t)+\overline{b}(t)\,u(t),\quad x(t_0)=x_0, \qquad (1)$$

где $x(t)$ – n-мерный вектор, компоненты которого определяют состояние электромеханического объекта в момент времени t; $u(t)$ – m-мерный вектор управляющих воздействий; $\overline{A}(t)$ – матрица параметров объектов управления размерности $(n\times n)$, $\overline{b}(t)$ – матрица влияния управляющих воздействий размерности $(n\times m)$; x_0 – начальное состояние электромеханического объекта в момент времени t_0.

Так как сигнал с ПЭВМ поступает в дискретные моменты времени, дискретная модель, соответствующая непрерывной модели (1), имеет вид:

$$x(k+1)=\tilde{A}(k)\,x(k)+\tilde{b}(k)\,u(k),\quad x(0)=x_0, \qquad (2)$$

где матрицы $\tilde{A}(k)$ и $\tilde{b}(k)$ рассчитываются по формулам [2]:

$$\tilde{A}(k)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Delta t^m\,\overline{A}(t_k)^m}{m!},$$
$$\tilde{b}(k)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Delta t^m\,\overline{A}(t_k)^{m-1}\,\overline{b}(t_k)}{(m-1)!}. \qquad (3)$$

Если обозначить через $\tilde{A}(k)$ и $\tilde{b}(k)$ суммы N первых членов рядов (3) соответственно, то матрицы $\tilde{A}_N(k)$ и $\tilde{b}_N(k)$ аппроксимируют $\tilde{A}(k)$ и $\tilde{b}(k)$ с погрешностью порядка $0(\Delta t^N)$. При этом число слагаемых в $\tilde{A}(k)$ и $\tilde{b}(k)$ можно задавать заранее (вычисление с фиксированной точностью) или определять автоматически с помощью соотношения:

$$\frac{\left\|\left\|\tilde{A}_N(k)\right\|-\left\|\tilde{A}_{N-1}(k)\right\|\right\|}{\left\|\tilde{A}_N(k)\right\|}\le\varepsilon,\quad \frac{\left\|\left\|\tilde{b}_N(k)\right\|-\left\|\tilde{b}_{N-1}(k)\right\|\right\|}{\left\|\tilde{b}_N(k)\right\|}\le\varepsilon, \qquad (4)$$

где ε выбирается из условия обеспечения максимальной точности вычислений на ПЭВМ конкретного типа.

Такт k в (2–4) соответствует моменту времени $t_k=t_0+k\Delta t$, Δt – период дискретности по времени.

2. Структура широтно-импульсного модулятора (ШИМ)

В качестве управляющего воздействия рассматривается выходное напряжение импульсного преобразователя, модулированного по широтно-импульсному закону и поступающее на исполнительный элемент электромеханического объекта. Широтно-импульсный модулятор (ШИМ) описан следующими уравнениями:

$$u(k+1)=\begin{cases}\Re\,\tilde u(k) \text{ при } \tilde u(k)\le \dfrac{T}{\Re},\\ T \qquad \text{ при } \tilde u(k) > \dfrac{T}{\Re};\end{cases}$$

$$U(k)=\begin{cases}U_{П.} \text{ при } t_0+kT\le k\le t_0+kT+u(k),\\ 0 \quad \text{ при } t_0+kT+u(k)<k<t_0+(k+1)T,\end{cases}$$

где $\tilde u(k)$ – входной сигнал в такт времени $t_0+k\Delta t$, $\Re$ и T – коэффициент передачи и период импульсного преобразователя электромеханического модуля соответственно, $U_{П.}$ – напряжение питания исполнительной части объекта управления.

3. Синтез регуляторов функционирования системы управления объектом

Для увеличения качества процесса управления объектом (увеличения быстродействия и точности достижения заданного значения) синтезируем несколько типов регуляторов.

3.1. Пропорциональный регулятор на основе функций Ляпунова 2-го порядка

Параметры регулятора будем определять, исходя из минимизации квадратичного интегрального критерия:

$$I=\int_{t_0}^{T} e^T(t)\,Q\,e(t)\,dt,$$

где $e(t)=y_{зад.}(t)-y(t)$ – ошибка регулирования, ^{T} – знак транспонирования, Q – диагональная матрица $(n\times n)$, элементы которой определяются аналогично с п. 3.2.

Для получения необходимой плавности движения в окрестности заданной точки позиционирования и асимптотической устойчивости возмущённой системы управления синтез управления приводом может быть осуществлён на основе второго метода Ляпунова.

Используя дискретное представление объекта (2) и функцию Ляпунова квадратичной формы:

$$V(x(k))=x(k)^T\,P\,x(k), \tag{5}$$

где P – положительно-определённая $(n\times n)$ – матрица, управление $\tilde u(k)$ будем находить из условия минимума первой разности функции $V(x(k))$:

$$\Delta V(x(k))=V(x(k+1))-V(x(k)),$$

вычисленной на решении системы (2).

Минимизируя (5) по $\tilde u(k)$ получим:

$$\tilde u(k)=-((F(k)^T P\,B(k))^T+$$
$$+B(k)^T P\,F(k))\,(B(k)^T P\,B(k))^{-1},$$

где $F(k)$ и $B(k)$ – линеаризованные по методу Эйлера в первом приближении матрицы:

$$F(k)=I+\widetilde A(k)T,\quad B(k)=F(k)\widetilde b(k).$$

Матрица P определяется из условия минимума критерия (6):

$$F(k)^T PF(k)-P=-Q.$$

Построенный закон управления обеспечивает наиболее быстрое убывание функции Ляпунова (5), определённой на решениях системы (2).

3.2. Пропорциональный регулятор на основе функций Беллмана

Пусть модель объекта задана в виде (2). Будем считать, что вектор состояния x измеряем полностью.

Функционал качества имеет вид [3]:

$$J=\sum_{k=0}^{N-1}(x(k)^T Q(k)\,x(k)+$$
$$+u(k)^T R\,u(k))+x(N)^T\Lambda\,x(N), \tag{6}$$

где Λ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $(n\times n)$, R – положительно определенная симметрическая матрица $(q\times q)$. Требуется найти управление $\tilde u(k)$ с полной обратной связью, минимизирующее функционал (13). Уравнение Беллмана принимают вид:

$$J(k,x)=\min_u\begin{bmatrix}x(k)^T Q\,x(k)+\tilde u(k)^T R(k)\tilde u(k)+\\ +B(k+1,A(k)x+B(k)\tilde u(k))\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Функция Беллмана $J(k,x)$ определяется по формуле:

$$J(k,x)=x^T(k)P(k)\,x(k), \tag{8}$$

где $P(k)$ – неизвестная неотрицательно определенная симметрическая матрица размера $(n\times n)$. Получаем, что в задаче (6–8) оптимальное управление определяется соотношением:

$$\tilde u(k)=K(k)\,x(k),$$
$$k=0,1,\ldots,(N-1),$$

где $K(k)$ – матрица коэффициентов усиления регулятора размера $(q\times n)$:

$$K(k)=[R+B(k)^T P(k+1)\,B(k)]^{-1}\times$$
$$\times B(k)^T P(k+1)\,A(k),\quad k=0,1,\ldots,(N-1),$$

а матрица $P(k)$ размера $(n\times n)$ удовлетворяет уравнению:

$$P(k)=Q+K(k)^T R\,K(k)+$$
$$+(A(k)-B(k)\,K(k))^T P(k+1)\,(A(k)-B(k)\,K(k)),$$
$$k=(N-1),\ldots,1,0,$$
$$P(N)=\Lambda.$$

Матрица Q оценивает отклонения реальных переменных состояния от желаемых и представляет собой своеобразный “штраф” за большие ошибки при любом $t_0\le t\le t_k$. Матрица R, будучи всегда положительной, оценивает стоимость управления. Физически она характеризует затрагиваемую энергию на управление. Матрица Λ характеризует ошибку управления в конечный момент времени.

Предварительный выбор значений элементов весовых матриц Q и R может быть осуществлен с помощью следующих рекомендаций:

- обычно матрицы Q и R назначаются постоянными и диагональными, т.е. матрица Q содержит n ненулевых элементов q_{ii}, i=1,2,...,n, а матрица R–r содержит r элементов q_{jj}, j=1,2,...,n;
- принимаем, что максимально допустимые отклонения переменных состояния $x(k)$ в любой момент времени вносят в функционал качества одинаковый вклад.

Распространяя аналогичные рассуждения и на отклонения сигналов управления $u(k)$, можно записать:

$$q_{ii} = \left(\frac{x_{1\max}}{x_{i\max}}\right)^2 q_{11}, \quad r_{jj} = \left(\frac{u_{1\max}}{u_{j\max}}\right)^2 r_{11}. \tag{9}$$

Здесь $x_{i\max}$ и $x_{j\max}$ – максимально допустимые отклонение, определяемое техническим заданием, i-ой переменной состояния (i=2,3,...,n) и j-ого сигнала управления (j=2,3,...,r) соответственно.

Общий вклад максимально допустимых отклонений переменных состояния должен приблизительно соответствовать общему вкладу максимально допустимых отклонений сигналов управления.

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ii} x^2{}_{i\max} = \sum_{j=1}^{n} r_{jj} u^2{}_{j\max}; \tag{10}$$

- произвольно выбираем значение r_{11} (например, r_{11}=1) и по формулам (9, 10) вычисляем значения остальных коэффициентов.

Полученные значения весовых коэффициентов следует рассматривать как начальные оценки. Если отклонения по всем переменным достигают своего максимума не одновременно, формулы (9, 10) неверно отражают требования, предъявляемые к системе. Поэтому окончательный выбор весовых коэффициентов целесообразно производить после нескольких пробных процедур синтеза и моделирования системы управления.

3.3. Пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор (ПИД)

Наиболее распространенными алгоритмами являются пропорционально-интегральный (ПИ) и ПИД алгоритмы цифрового управления. При правильной настройке эти алгоритмы обеспечивают достаточно хорошее качество управления для большинства объектов промышленной технологии.

Рассмотрим процедуру вывода алгоритма цифрового ПИД-регулятора из соответствующего непрерывного закона, имеющего вид [4]:

$$\tilde{u}(t) = K_p\left(e(t) + \frac{1}{T_u}\int_{t_0}^{T} e(t)dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right), \tag{11}$$

где K_p, T_u, T_d – пропорциональный, интегральный, дифференциальный коэффициенты регулятора соответственно, $e(t)$ – ошибка рассогласования.

Запишем (11) в конечных разностях путем замены: $t=kT_k$, Δt – период дискретности во времени:

$$\tilde{u}(k) = K_p\left[e(k) + \frac{1}{T_u}\sum_{i=0}^{k} e(i)T_k + T_d\,\frac{e(k)-e(k-1)}{T_k}\right],$$

где k=1,2,3,...,(N+1), T_k – номер и величина периода квантования.

Отметим, что при достаточно малых периодах квантования цифровой ПИД закон управления обеспечивает почти такое же качество процессов управления, что и исходный непрерывный закон (11). Для того, чтобы эффект квантования по времени мало сказывался на динамику системы цифрового регулирования, рекомендуется выбирать период квантования из соотношения [5]:

$$\frac{T_{95}}{15} < T_k < \frac{T_{95}}{5},$$

где T_{95} – время достижения выходным сигналом уровня 95 % от установившегося значения при подаче на вход объекта сигнала ступенчатой формы.

Настройку ПИД-регулятора (нахождения параметров K_p, T_u, T_d), будем осуществлять, руководствуясь заданной относительной степенью затухания φ [5]. Определяем значение логарифмического декремента затухания m:

$$m = \frac{-\ln(1-\varphi)}{2\pi}.$$

Система автоматического управления будет обладать требуемой относительной степенью затухания, если амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы автоматического управления будет проходить через точку на комплексной плоскости (–1, j0) [6]: K_p=0,409, T_u=8,696, T_d=0,035.

4. Оценка робастности

Проведём анализ синтезированных регуляторов на робастность (реакцию на изменение параметров объекта). Будем считать, что объект является нестационарным, т.е. его параметры изменяются во времени. Положим, что объектом управления является двигатель постоянного тока ДК-1. Переходные процессы по току двигателя без вынужденных возмущений и при увеличении момента сопротивления в момент времени $t_k=t_0+k\cdot\Delta t$, k=200 (заданное значение по скорости равно 1) изображены на рисунке.

Таблица. *Характеристики синтезированных пропорциональных регуляторов*

Тип регулятора	Перерегулирование, %		Установившееся значение		Время, такты	
	Без возмущений	С нагрузкой	Без возмущений	С нагрузкой	Без возмущений	С нагрузкой
K=1	1,532	–	0,999	–	144	–
По функциям Ляпунова	0	0	0,995	0,983	126	300
ПИД	0	0	0,994	0,987	140	261
По функциям Беллмана	0	0	0,995	0,984	122	295

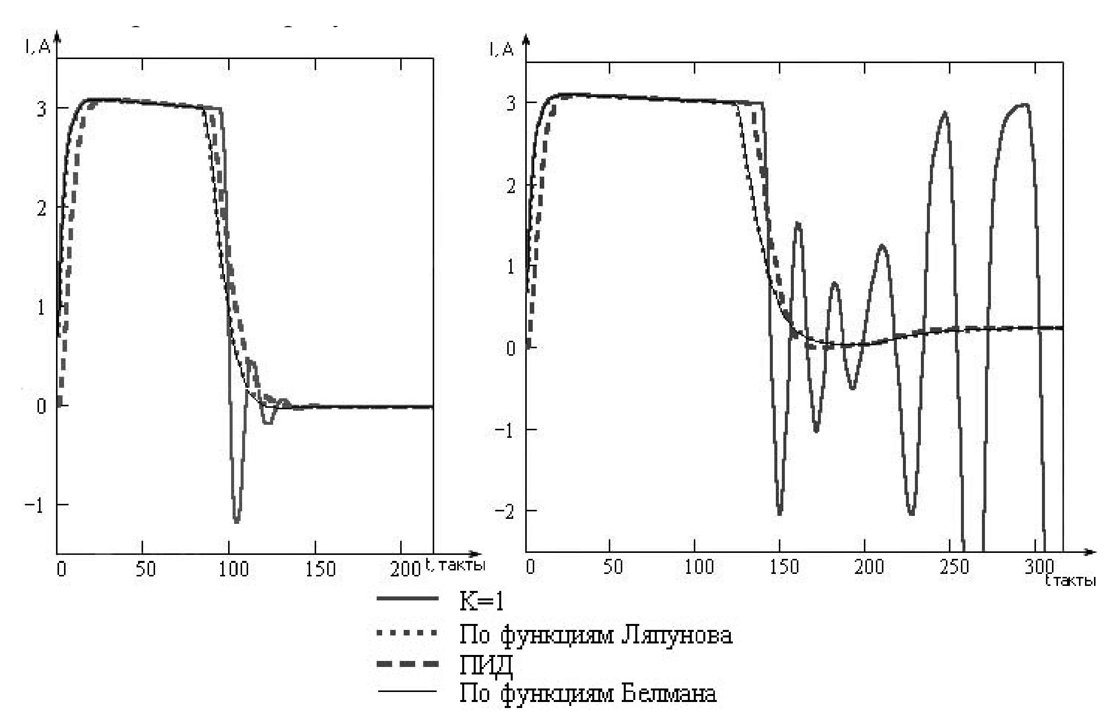


Рисунок. *Переходные процессы по току на обмотке двигателя, обеспечиваемые синтезированными регуляторами (без вынужденных возмущений – слева и при увеличении нагрузки на валу в 3 раза – справа)*

По результатам, приведённым в таблице, можно заключить, что робастность регуляторов, синтезированных по предложенным алгоритмам, определяется в соответствии с конкретно поставленными задачами. В зависимости от требований, предъявляемых к объекту управления, поставленными перед ним целями и возможными затратами, может быть выбран тот или иной алгоритм управления.

В нашем случае наиболее подходящим является ПИД-регулятор.

Заключение

В современной теории управления нестационарными электромеханическими объектами большое внимание уделяется робастности алгоритмов к действующим возмущениям. В данной статье были исследованы на нечувствительность несколько типов регуляторов, приведены результаты исследования, сделаны рекомендации по поводу использования того или иного регулятора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. – М.: Машиностроение, 1972. – 183 с.
2. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983. – 357 с.
3. Колосов С.П., Калмыков И.В., Нефедова В.И. Элементы автоматики. – М.: Машиностроение, 1970. – 285 с.
4. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. – М.: МАИ, 1997. – 514 с.
5. Атанс М., Фабл П. Оптимальное управление. – М.: Машиностроение, 1968. – 764 с.
6. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000. – 549 с.